ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 -

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ и ПРИМЕНЕ, НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (17)

1. Израчунати вредност несвојственог интеграла $\int_{-\infty}^{\frac{4}{3}} 2e^{3x-4}\,dx \left(=\frac{2}{3}\right)$. ***(фебруар 2019.)***

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-3}^{3} x^3\cos x\,dx\,(=0)$. ***(октобар 2018.)***

3. Израчунати вредност несвојственог интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2}\left(=\frac{\sqrt{6}}{6}\pi\right)$. ***(септембар 2018.)***

4. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx\,(=4)$. ***(јул 2018.)***

5. Одредити величину површине ограничене кривама $y=|x|$ и $y=2-x^2$. $\left(P=\frac{7}{3}\right)$ ***(јун 2018.)***

6. Нека је $f(x)=\begin{cases}\ln(3-x), & 0\le x\le 2\\ -(x-2)^2, & 2<x\le 3\end{cases}$. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^3 f(x)\,dx\left(=-\frac{7}{3}+3\ln 3\right)$.

(фебруар 2018.)

7. Одредити величину површине ограничене кривом $y=\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ и правама $x=1$ и $y=0$. $\left(P=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$

(октобар 2017.)

8. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right)^2}{x^2-1}dx\left(=\frac{1}{6}\ln^3\frac{3}{4}\right)$. ***(септембар 2017.)***

9. Одредити вредност параметра $a\in\mathbb{R}^+$ за коју важи једнакост $\int_{-a}^{a}|\sin x|dx=2$. $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$ ***(јул 2017.)***

10. Израчунати вредности одређених интеграле

а) $\int_{e^{-1}}^{1}\frac{\cos(\ln x)}{x}dx\,(=\sin 1)$; ***б)*** $\int_{-4}^{4} x\cos(5x)\,dx\,(=0)$. ***(јун 2017.)***

11. Нека је $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^2 f(x)\,dx\left(=\frac{5}{6}\right)$. ***(фебруар 2017.)***

12. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) Ако је $f:[0,2]\to[0,5]$, онда је $\int_0^2 f(x)dx\le 10$.

б) Ако је $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ парна функција, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

в) Ако је $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ непарна функција, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

г) Ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(октобар 2016.)***

13. Одредити вредност параметра $a\in\mathbb{R}^{+}$ за коју важи једнакост $\frac{1}{a}\int_{0}^{a}\left(3x^{2}+5\right)dx=6$. $(a=1)$ ***(септембар 2016.)***

14. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x^{3}\,|x|\,dx\,(=0)$. ***(јул 2016.)***

15. Одредити величину површине ограничене кривом $y=\operatorname{arctg}x$ и правама $x=-1$ и $y=0$. $\left(P=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)$

(јун 2016.)

16. Заокружити слова испред тврђења која важе за функцију f која је интеграбилна на сегменту $[a,b]$.

а) Ако су F_1 и F_2 примитивне функције функције f на сегменту $[a,b]$, онда за свако $x\in[a,b]$ важи да је $F_1(x)=F_2(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

б) Ако за свако $x\in[a,b]$ важи $f(x)\le M$, $M\in\mathbb{R}$, онда је $\int_{a}^{b} f(x)dx\le M(b-a)$.

в) Ако за свако $x\in[a,b]$ важи $f(x)\le M$, $M\in\mathbb{R}$, онда је $\int_{a}^{b} f(x)dx\le M$.

г) Ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(фебруар 2016.)***

17. Израчунати вредност несвојственог интеграла $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx\,(=1)$. ***(јануар 2016.)***

<u>2.</u> <u>ИСПИТНИ ЗАДАЦИ</u> (39)

1. **[4]** Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{0}^{1}\frac{x^{3}}{\sqrt{\left(1+2x^{2}\right)^{3}}}dx\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)$. ***(септембар 2018.)***

2. **[9]** Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{3-2x-x^{2}}}dx\left(=2-\frac{\pi}{4}\right)$; ***(б)*** $\int_{0}^{1}\ln(1+x^{3})\,dx\left(=2\ln 2-3+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$. ***(октобар 2018.)***

3. **[11]** Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\int_{1}^{2} x\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^{2}-1}dx\left(=2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\operatorname{arctg}2+1\right)$; ***(б)*** $\int_{1}^{2}(3x+2)\ln x\,dx\left(=10\ln 2-\frac{17}{4}\right)$. ***(јун 2012.)***

4. **[9]** Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^{4}x}dx\left(=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}-\frac{\ln 4}{3}\right)$. ***(септембар 2015.)***

5. [8] Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx\left(=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right).$ ***(јун 2011.)***

6. [7] Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^{\sqrt{3}} x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx\left(=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-2\right).$ **(*април 2013.*)**

7. [10] Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}dx\left(=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{8}\right).$ ***(октобар 2014.)***

8. [8] Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7+7x^3-x+1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx\left(=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right).$ ***(фебруар 2014.)***

9. [11] ***(а)*** Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+tgx}{1-tgx}dx\left(=\ln\sqrt{2}\right).$

(б) Доказати да важи формула $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ и применити је на израчунавање интеграла

$J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\,tg\,x\right)dx\left(=\frac{\pi}{3}\ln 2\right).$ ***(јануар 2012.)***

10. [10] Доказати да су интеграли $J_1=\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ и $J_2=\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ једнаки, а затим их израчунати.

$\left(J_1=J_2=\frac{\pi}{2}\right)$ ***(јул 2014.)***

11. [9] Доказати да важи формула $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ и применити је на израчунавање интеграла

$J=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}dx(=1).$ ***(јун 2018.)***

12. [8] Доказати да важи формула $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ и применити је на израчунавање интеграла

$J=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\left(=\frac{\pi^2}{4}\right).$ ***(јануар 2013.)***

13. **[9]** Доказати да важи формула $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$ и применити је на израчунавање интеграла $J=\int_0^{\pi}\frac{1+\sin^2 x}{6-\cos^2 x+|\cos x|}x\sin x\, dx\left(=\pi\left(\frac{9}{5}\ln\frac{2}{3}+1\right)\right)$. ***(октобар 2016.)***

14. **[7]** Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)dx\left(=\frac{\pi^2}{8}\right)$. ***(фебруар 2017.)***

15. **[7]** Доказати да важи формула $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos x\right) dx$ и применити је на израчунавање интеграла $J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\left(=\frac{\pi\ln 2}{8}\right)$. ***(фебруар 2016.)***

16. **[9]** Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+\mathrm{e}^x\right)}\left(=\frac{\pi}{4}\right)$. ***(јул 2015.)***

17. **[10]** Одредити рекурентну формулу за интеграл $I(n)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\, dx$, $n\in\mathbb{N}$, а затим наћи интеграл $I(n)$.

$\left(I(n)=\frac{2n}{2n+1}I(n-1),\quad I(n)\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}2\right)$ ***(април 2012.)***

18. **[10]** Одредити рекурентну формулу за интеграл $I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n} x\, dx$, $n\in\mathbb{N}$. $\left(I(n)=\frac{1}{2n+1}-I(n-1)\right)$ ***(април 2011.)***

19. **[11]** Одредити рекурентну формулу за интеграл $I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx$, $m,n\in\mathbb{N}_0$, а затим наћи интеграл $I(m,n)$. $\left(I(m,n)=\frac{m}{n+1}I(m-1,n+1),\quad I(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\right)$ ***(септембар 2014.)***

20. **[11]** Одредити рекурентну формулу за интеграл $I(m,n)=\int_0^1 x^m\ln^n x\, dx$, $m,n\in\mathbb{N}_0$, а затим наћи интеграл $I(0,n)=\int_0^1\ln^n x dx$. $\left(I(m,n)=-\frac{n}{m+1}I(m,n-1),\quad I(0,n)=(-1)^n n!\right)$ ***(април 2014.)***

21. **[7]** Одредити величину површине фигуре која је ограничена кривом $y=\ln x$ и правама $x=3$ и $y=-1$.
$\left(P=3\ln 3+e^{-1}\right)$ ***(октобар 2011.)***

22. **[10]** Одредити величину површине фигуре која је ограничена кривом $y=-2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ и правама $x=1$ и $y=0$. $\left(P=2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-2\sqrt{2}+2\right)$ ***(јануар 2010.)***

23. **[8]** Одредити величину површине фигуре која је ограничена кривама $y=\sqrt{2x-1},\ y=\log_2 x,\ x=\dfrac{1}{2}$ и $x=4$.

$\left(P=-\dfrac{17}{2}+\dfrac{\sqrt{7^3}}{3}+\dfrac{7}{2\ln 2}\right)$ ***(фебруар 2019.)***

24.**[10]**Одредити величину површине фигуре која је ограничена елипсом $4x^2+9y^2=36$.

$\left(P=6\pi\right)$ ***(фебруар 2013.)***

25. **[10]** Одредити величину површине фигуре која је ограничена круговима $x^2+y^2=11$ и $x^2+(y-5)^2=16$.

$\left(P=11\arcsin\sqrt{\dfrac{7}{11}}+16\arcsin\sqrt{\dfrac{7}{16}}-5\sqrt{7}\right)$ ***(фебруар 2009.)***

26. **[9]** Одредити величину површине фигуре која је ограничена параболом $y^2=4a(a+x)$, кругом $x^2+y^2=4a^2$ и тангентом на дати круг у тачки $(2a,0)$, $a>0$. $\left(P=\dfrac{8a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)-2a^2\pi\right)$ ***(октобар 2010.)***

27. **[8]** Крива $y=\dfrac{\ln|x|+1}{x}$, $x-$оса и права $x=a$, $a\in\mathbb{R}$, $a>e^{-1}$, ограничавају део равни. За коју вредност параметра a је површина тог дела равни једнака 2? $\left(a=e,\quad P=\dfrac{(\ln a+1)^2}{2}\right)$ ***(јануар 2015.)***

28. **[8]** Ротацијом елипсе $9\left(x-2\right)^2+4y^2=36$ око $x-$осе настаје тело T.

а) Написати формулу за израчунавање величине површине S тела T. $\left(S=\dfrac{3\pi}{2}\displaystyle\int_0^4\sqrt{16+5(x-2)^2}\,dx\right)$

б) Написати формулу за израчунавање величине запремине V тела T. $\left(V=\dfrac{9\pi}{4}\displaystyle\int_0^4\left(4-(x-2)^2\right)dx\right)$

в) Израчунати величину површине или запремине тела T (по избору). $\left(V=24\pi\right)$ ***(април 2009.)***

29. **[9]** Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом круга $x^2+(y-4)^2=9$ око x-осе.

$\left(P=72\pi\right)$ ***(јул 2013.)***

30. **[8]** Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом површи између x-осе и криве $f(x)=e^{-x}\sin x$ за $x\in[0,\pi]$ око x-осе. $\left(V=\dfrac{\pi}{8}\left(1-e^{-2\pi}\right)\right)$ ***(јун 2016.)***

31. **[7]** Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом површи између x-осе и криве $f(x)=x\sqrt{3\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ за $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ око x-осе. $\left(V=\dfrac{\pi}{8}\left(9\ln 3-16\ln 2+2\right)\right)$ ***(јануар 2016.)***

32. **[8]** Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом површи између x-осе и криве $f(x)=\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$ за $x\in\left[0,2\right]$ око x-осе. $\left(V=\pi\left(2\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}+1\right)\right)$ ***(јул 2018.)***

33. **[9]** Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом површи између праве $y=1$ и параболе $f(x)=x^2$ око x-осе. $\left(V=\dfrac{\pi}{5}\right)$ ***(јун 2015.)***

34. **[9]** Израчунати вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}\left(=\frac{\pi}{2\sqrt{15}}\right)$. ***(јун 2010.)***

35. **[7]** Израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{|\sin x|+2|\cos x|}{|\cos x|+2|\sin x|}dx\left(=-\frac{3}{5}\ln 2-\frac{4}{5}\pi\right)$. ***(јул 2017.)***

36. **[7]** Израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}dx\left(\begin{cases} 0, & |a|<1 \\ \dfrac{2\pi}{a}, & |a|>1 \end{cases}\right)$, за $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. ***(октобар 2017.)***

37. **[9]** Израчунати вредности интеграла

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1-x^2}}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)$, ***б)*** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}\left(=\frac{2\ln 2}{3}\right)$. ***(септембар 2016.)***

38. [8] Испитати конвергенцију следећих несвојствених интеграла:

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}(=+\infty)$ дивергира; ***б)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3}(=+\infty)$ дивергира; ***в)*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}\left(=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 2\right)$ конвергира. ***(јун 2014.)***

39. **[9]** Израчунати вредност несвојственог интеграла $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}\left(=\frac{1}{3}\ln 4\right)$. ***(септембар 2011.)***

40. **[9]** Израчунати вредност несвојственог интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2}dx\left(=\frac{\pi}{4}\right)$. ***(јул 2011.)***

41. **[8]** Израчунати вредност несвојственог интеграла $I(n)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x+c\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}, c>1$.

$$\left(I(n)=\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{c-1}I(n-1),\, I(n)=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{(c-1)^{n-1/2}}\right)$$ ***(фебруар 2018.)***

42. [10] Одредити вредности реалног параметра a за које интеграл $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin ax\,dx$ конвергира, и у тим случајевима одредити његову вредност. ***(октобар 2013.)***

$$I(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin ax\,dx=\begin{cases} \text{не постоји}, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ \dfrac{1}{2a}, & a>0 \end{cases}$$